Ueber die Abbildung

der fünf platonischen Körper

in

centrierten Systemen sphärischer Flächen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät der Landes-Universität Rostock

vorgelegt von

Emil Möhring

aus Berlin.

BERLIN.
Druck von R. Boll.
1898.

Referent: Herr Professor Dr. phil. et med. **L. Matthiessen.**

Meinen lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552726_0174

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck eine Erweiterung auf dem Gebiete der optischen Abbildungen zu liefern, sofern zur Lösung des Problems Objekte gewählt sind, welche Krystallformen des regulären Systems oder reguläre Polyeder überhaupt darstellen. Die Untersuchung schliesst sich einer Arbeit von C. Winter*) an, welcher den bisher in der Dioptrik behandelten einfachen Fall — Bilder sehr kleiner geradliniger, senkrecht zur optischen Axe stehender Objekte (Punkt und Gerade) — auf beliebig gerichtete Linien, Ebenen, Kurven und Flächen ausgedehnt hat. Es mussten daher einige Entwicklungen dieser Arbeit berührt werden.

Nach einem einleitenden Kapitel der Dioptrik, welches nur die wesentlichen Ableitungen hervorhebt, soll eine kurze Beschreibung der fünf platonischen Körper — Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder — folgen. Die Entwicklungen der geometrischen Verhältnisse sind unterlassen, da sie in den besseren Lehrbüchern der Stereometrie**) zu finden sind; es folgen daher die für den vorliegenden Fall notwendigen Relationen nur in

*) C. Winter „Dioptrische Bilder" von sehr kleinen paraxialen Objekten in centrierten sphärischen Flächensystemen. Inaug.-Diss. Rostock 1897.

**) Heis: Lehrbuch der Geometrie (2. Teil), 4. Auflage, Köln 1881; herausgegeben von Prof. L. Matthiessen.

Form der Entgleichungen. In den nächsten Kapiteln werden dann die ausgeführten Berechnungen für genannte Beispiele mitgeteilt.

§ 1.

Die Dioptrik behandelt die Lehre vom Wege der Lichtstrahlen beim Durchgang durch eine Reihe isotroper Medien, entsprechend der Einrichtung optischer Instrumente, wie Fernrohr und Mikroskop; die Brechung an einer einzelnen Fläche bildet den einfachsten Fall der mathematischen Betrachtung. Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes gestattet die hier in Betracht kommenden Vorgänge mathematisch zu behandeln und man versteht unter dioptrischen Abbildungen mathematische Beziehungen zwischen Lage, Grösse und Gestalt von Bildern zu denen ihrer Objekte. Ein optisches Bild eines Punktes entsteht, wenn die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Lichtstrahlen sich nach dem Durchgang durch ein optisches Mittel wieder zu einem Punkt vereinigen.

Die Theorie der Dioptrik beschränkt sich in der angewandten Optik meistens auf den speciellen Fall, welchen Gauss in seinen „dioptrischen Untersuchungen“ behandelt hat. Diese Untersuchungen leitete der Gedanke, die Gesetze, welche für einfache optische Mittel — Brechung an einer einfachen Linse von geringer Dicke — aufgestellt waren, auf eine beliebige Anzahl hintereinander geschichteter, centrierter brechender Kugelflächen von verschiedenem Brechungsvermögen auszudehnen. Das Resultat dieses „dioptrischen Problems“ war der Nachweis einer prinzipiellen Analogie zwischen den einfachsten Fall einer einzigen Fläche und dem allgemeinen Fall eines centrierten Systems beliebig vieler Medien, bezüglich der Dimensionen von Bildern äusserer Objekte.

Die Verallgemeinerung solcher besonderen Fälle hat zu ganz allgemeinen Beziehungen geführt, so dass man von den Gauss'schen Beschränkungen absehen kann, wie dies beispielsweise bei der Brechung axialer Büschel an nicht centrierten Systemen von Kugelflächen durchgeführt ist. Für den vorliegenden Fall ist jedoch, wie allgemein üblich, von den Gauss'schen Voraussetzungen Gebrauch gemacht; letztere fassen sich in folgende Sätze zusammen:

1. Das System brechender Flächen, auch kurzweg Diopter genannt, ist ein von Kugelflächen centriertes; mithin liegen die Scheitel- und Krümmungsmittelpunkte, sowie die Kardinalpunkte des Systems auf einer Centrale, der optischen Axe.
2. Die vom Objekte ausgehenden Lichtstrahlen bilden mit der optischen Axe sehr kleine Winkel, so dass jene das System nahezu senkrecht treffen, woraus weiter folgt, dass die Dimensionen der Objekte — also auch die der Bilder — gegen ihre Abstände verhältnismässig sehr klein sind. (Der Ausdruck „verhältnismässig sehr klein" bezieht sich hier auf Linien- resp. Raumgrössen, welche noch einer sinnlichen Wahrnehmung und einer graphisch möglichen Darstellung unterliegen, und bei denen erst die Grösse der Kleinheit zweiter Ordnung als „verschwindend klein" anzusehen ist.)

Da man das System brechender Flächen nur in seiner Gesamtwirkung betrachtet, die Bahnen der Lichtstrahlen von Fläche zu Fläche also ausser acht lässt, so sind

zur Aufstellung einer Abbildungsgleichung nur wenige Bestimmungsstücke nötig. Hierzu gehört die Feststellung der Lage der Hauptbrennpunkte und der Hauptpunkte, neben welchen noch die Knotenpunkte wegen ihrer charakteristischen Eigenschaft besonderes Interesse haben. Ausser diesen auf der optischen Axe gelegenen Fundamentalpunktepaaren, Kardinalpunkte genannt, giebt es noch eine Reihe anderer konjugierter Punkte, deren Kenntnis der Dioptrik manche Vorteile bietet, indem sich an das Vorhandensein derselben wichtige Bedingungen knüpfen. Die mathematische Analysis der Dioptrik besteht in der Anwendung von Kettenbrüchen der Kettenbruch-Determinanten bei discontinuirlichen Systemen, in der Entwicklung von Integralen bei continuirlichen Systemen.

Es würde uns hier zu weit führen auch nur die allgemeinsten Eigenschaften dieser Punkte zu berühren; wir beschränken uns auf eine kurze Charakterisirung der Kardinalpunkte.

Die Haupt-Brennpunkte sind derart mit ihren Lichtpunkten konjugiert, dass parallel zur optischen Axe in die Vorderfläche des Systems eintretende Strahlen sich im zweiten Hauptbrennpunkt Φ vereinigen, andererseits die vom ersten Brennpunkt F ausgehenden Strahlen parallel zur optischen Axe austreten.

Dem Scheitelpunkte bei einer einzigen brechenden Fläche, welcher als Doppelpunkt zweier konjugierter Punkte zu betrachten ist, entsprechen bei unsern Dioptern die Hauptpunkte H_α und H_β. Ihre Einführung, von Gauss herrührend, gestaltete die dioptrischen Gleichungen wesentlich einfacher; denn vordem war man zu dem umständlichen Verfahren gezwungen alle Abstände der

Objekt- und Bildpunkte, sowie der Brennpunkte von den Scheiteln der einzelnen brechenden Flächen zu bestimmen.

Die Eigenschaften der Hauptpunkte erstrecken sich auch auf die durch sie senkrecht zur optischen Axe gelegten Ebenen, die beiden Hauptebenen. Es ist nämlich die zweite Hauptebene das Bild der ersten, d. h. befindet sich in der ersten ein leuchtender Punkt, so liegt in der zweiten Hauptebene sein kongruentes, homothetisches Bild. Entsprechend der Scheitelpunktsgleichung resultiert hier in derselben Form die Hauptpunktsgleichung:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1 \qquad (1)$$

Das Koordinatensystem ist hier bipolar, da die Abscissen x_0 und x_1 und die Hauptbrennweiten f und φ auf $H\alpha$ und $H\beta$ als Koordinatenanfangspunkte zu beziehen sind.

Die Knotenpunkte $K\alpha$ und $K\beta$, deren Einführung von Moebius und Listing herrührt, charakterisieren sich dadurch, dass jedem nach dem ersten Knotenpunkt gehenden Strahl ein durch den zweiten parallel austretender entspricht. Jeder eintretende Knotenpunktsstrahl wird also beim Austritt parallel verschoben. Denkt man sich mit einem einfallenden Knotenpunktsstrahl um ein Objekt einen Umhüllungskegel beschrieben, so entspricht diesem nach dem ersten Knotenpunkt konvergierenden Strahlenkegel ein aus dem zweiten Knotenpunkt unter gleichem Winkel divergierender — resp. nach dem zweiten Knotenpunkt konvergierender —, welcher jenem kongruent und Umhüllungskegel des Bildes ist.

Der Krümmungsmittelpunkt einer einzigen Fläche, der die Eigenschaft hat einen gegen ihn gerichteten Strahl

ungebrochen hindurchgehen zu lassen, ist demnach als Vereinigungspunkt zweier Knotenpunkte zu betrachten.

Da die Knotenpunkte konjugierte Punkte sind, so ist eine Knotenebene das Bild der anderen, welches noch homothetisch, aber nicht mehr kongruent ist.

Die Haupt- und Knotenpunkte liegen paarweise zu den Haupt-Brennpunkten des Diopters symmetrisch, analog der Lage des Scheitel- und Krümmungsmittelpunktes. Wählen wir als bipolare Abscissenanfangspunkte die beiden Knotenpunkte, so ergiebt sich als Knotenpunktsgleichung oder Gleichung des geraden Durchgangs:

$$\frac{(-\varphi)}{k_0} + \frac{(-f)}{k_1} = 1 \tag{2}$$

Die Gleichung ergiebt sich aus (1), indem man substituiert:

$$x_0 = k_0 + r, \quad x_1 = k_1 + r, \quad r = f + \varphi$$

Ist das brechende Medium beim Ein- und Austritt des Lichtstrahls das gleiche, so liegen die Hauptpunkte symmetrisch zu den Brennpunkten; mithin sind unter dieser Bedingung die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten identisch.

Da im folgenden alle Ableitungen auf $K\alpha$ und $K\beta$ bezogen werden sollen, so sei noch eine einfache geometrische Konstruktion der Knotenpunkte angeführt und zwar unter der Voraussetzung, dass die Brenn- und Hauptpunkte gegeben sind.

Ein parallel zur optischen Axe einfallender Strahl $A_0 C_0$ (Fig. 1) treffe die erste Hauptebene in C_0, die zweite in C_1 und gehe bei seinem weiteren Verlaufe durch den zweiten Hauptbrennpunkt Φ. Da alle von einem Punkte B_0 der ersten Brennebene ausgehenden Strahlen nach ihrem

Austritte aus dem Diopter ein Bündel paralleler Strahlen bilden, so muss ein durch B_0 parallel zu $C_1 \Phi$ gezogener Strahl $S_0 B_0$ als $S_1 B_1$ austreten. Die Schnittpunkte der Strahlen $S_0 B_0$ und $S_1 B_1$ mit der optischen Axe liefern die beiden Knotenpunkte. Dass es für ein System nur ein Paar solcher Fixpunkte giebt, zeigt die folgende Ableitung.

Es ist

$$\triangle B_0 K_\alpha F \backsimeq \triangle C_1 \Phi H_\beta$$
$$\triangle B_1 K_\beta \Phi \cong \triangle E_0 B_0 C_0$$

folglich

$$F K_\alpha = H_\beta \Phi$$
$$\Phi K_\beta = B_0 C_0 = F H_\alpha$$

§ 2.

Da zur Bestimmung der einzelnen Bildpunkte der gegebenen Körper eine allgemeine Abbildungsgleichung nötig ist, so ist im folgenden nach Vorausschickung einiger einleitender Gleichungen die Ableitung einer solchen gegeben.

Einem axial gelegenen Objektpunkt entspricht nur ein axialer Bildpunkt. Die Abscissen dieser konjugierten Punkte müssen der auf die Knotenpunkte bezogenen Refraktionsformel

$$\frac{-\varphi}{k_0} + \frac{-f}{k_1} = 1$$

genügen.

Einem paraxial der optischen Axe gelegenen Objektpunkte entspricht nur ein paraxialer Bildpunkt. Es bleibt auch für die Abscissen praxialer konjugierter Punkte obige Formel bestehen und für die zugehörigen

Ordinaten werden durch nachfolgende Ableitung*) die nötigen Werte gefunden:

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi - x_1}{\varphi} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi} =$$

$$= -\frac{\varphi x_0}{f x_1} = \frac{k_0}{k_1}$$

Für die Längen von Objekt und Bild r_0 und r_1 (Fig. 2) und für die zugehörigen Neigungswinkel gegen die Knotenaxe α_0 und α_1 ergeben sich besondere Relationen. r_0 und r_1 liegen in derselben Ebene und sind gegen die Abscissen von L_0 und L_1 als verhältnismässig sehr kleine Grössen zu betrachten; demgemäss ist:

$$\overline{L_0 N_0} = r_0 \sin \alpha_0 = d k_0$$

$$\overline{L_1 N_1} = r_1 \sin \alpha_1 = d k_1$$

Aus der Ordinatengleichung geht für P_0 und P_1 hervor:

$$\frac{d y_0}{d y_1} = \frac{k_0 + d k_0}{k_1 + d k_1}$$

Da dk_0 und dk_1 gegen die Abscissen k_0 und k_1 zu vernachlässigen sind, so erhält man

$$\frac{d y_0}{d y_1} = \frac{k_0}{k_1}$$

und folgedessen

$$\frac{r_0 \sin \alpha_0}{r_1 \sin \alpha_1} = \frac{k_0}{k_1} \tag{3}$$

In dieser Gleichung müssen k_0 und k_1 der Refraktionsformel (2) und die Winkel α_0 und α_1 der von Prof. L. Matthiessen gegebenen Formel

$$f k_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = -\varphi k_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \tag{4}$$

*) s. L. Matthiessen: Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, Leipzig 1877, § 7.

genügen, deren Ableitung man aus (2) findet. Denn differenziert man

$$\frac{-\varphi}{k_0} + \frac{-f}{k_1} = 1$$

so ist:

$$\frac{\varphi \cdot dk_0}{k_0^2} + \frac{f\, dk_1}{k_1^2} = 0$$

$$\frac{dk_0}{dk_1} = -\frac{f k_0^2}{\varphi k_1^2}$$

Da $dk_0 = r_0 \cos \alpha_0$ und $dk_1 = r_1 \cos \alpha_1$, so kann man setzen

$$\frac{r_0 \cos \alpha_0}{r_1 \cos \alpha_1} = -\frac{f k_0^2}{\varphi k_1^2} \tag{5}$$

und erhält durch Division in Gleichung (3) den Wert:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{-\varphi k_0}{f k_1} = \frac{x_0}{x_1}$$

Wir können jetzt dazu übergehen mit Hülfe der Fig. 3 eine allgemeine Abbildungsgleichung für kleine geneigte Geraden herzuleiten. $O_0 A_0 = r_0$ sei eine solche; verbindet man O_0 mit dem ersten Knotenpunkt $K\alpha$, so liegt der Bildunkt O_1 von O_0 in der parallelen Knotenlinie $K\beta\ O_1$; der Bildpunkt von A_0 in der zur Knotenlinie $A_0\ K\alpha$ gezogenen Parallele $K\beta\ A_1$. Macht man nun auf $O_0\ K\alpha$ $O_0\ C_0 = r_0$ und vervollständigt die Figur zu der körperlichen Ecke $O_0\ A_0\ B_0\ C_0$, in der $O_0\ A_0 = O_0\ B_0 = O_0\ C_0$, $\sphericalangle B_0\ A_0\ C_0 = 1$ R und $\sphericalangle A_0\ C_0\ B_0 = \delta$ (einem Winkel beliebiger Grösse), so lässt sich aus dem so entstandenem rechtwinklig sphärischen Dreieck $A_0\ B_0\ C_0$ und dem zugehörigem Bilddreieck $A_1\ B_1\ C_1$ das Verhältnis der Neigungswinkel von $O_0\ A_0$ und $O_1\ A_1$ bestimman. Es ist:

$$\cos \delta = \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{cotg} \alpha_0$$

diesem Ausdruk analog:

$$\cos \delta = \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{cotg} \alpha_1$$

Durch Division beider Werte erhält man:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 : \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \beta_0 : \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{-\varphi k_1}{f k_0} \quad \text{s. (4)}$$

Diese Gleichung ging aus (5)

$$r_0 \cos \alpha_0 = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2} r_1 \cos \alpha_1$$

hervor, aus welcher durch Quadrieren folgt:

$$r_0^2 \cos^2 \alpha_0 = \frac{f^2 k_0^4}{\varphi^2 k_1^4} r_1^2 \cos^2 \alpha_1$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_0} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0 = 1 + \left(\frac{-\varphi k_1}{f k_0}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1$$

$$r_0^2 = \frac{f^2 k_0^4}{\varphi^2 k_1^4} r_1^2 \left[1 + \left(\frac{-\varphi k_1}{f k_0}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1\right] \cos^2 \alpha_1$$

$$r_0^2 = \frac{f^2 k_0^4}{\varphi^2 k_1^4} r_1^2 \left[\cos^2 \alpha_1 + (1 - \cos^2 \alpha_1)\left(\frac{-\varphi k_1}{f k_0}\right)^2\right]$$

$$r_0^2 = \frac{f^2 k_0^4}{\varphi^2 k_1^4} r_1^2 \left[\cos^2 \alpha_1 + \left(\frac{-\varphi k_1}{f k_0}\right) - \left(\frac{-\varphi k_1}{f k_0}\right)^2 \cos^2 \alpha_1\right]$$

$$r_0^2 = \frac{k_0^2}{k_1^2} r_1^2 \left[1 - \cos^2 \alpha_1 + \left(\frac{f k_0}{\varphi k_1}\right)^2 \cos^2 \alpha_1\right]$$

$$r_0 = \frac{k_0}{k_1} r_1 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 \left[1 - \left(\frac{f k_0}{\varphi k_1}\right)^2\right]}$$

oder dementsprechend:

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 \left[1 - \left(\frac{f k_0}{\varphi k_1}\right)^2\right]}}$$

Durch Umkehren der Indices erhält man die beiden Ausdrücke:

$$r_0 = \frac{k_0}{k_1} r_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0 \left[1 - \left(\frac{\varphi k_1}{f k_0}\right)^2\right]}}$$

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0 \left[1 - \left(\frac{\varphi k_1}{f k_0}\right)^2\right]}$$

Dies ist die sogenannte elliptische Abbildungsgleichung.*)

Setzt man den konstanten Wert

$$\left(\frac{\varphi k_1}{f k_0}\right)^2 \quad \psi^2$$

und

$$1 - \left(\frac{\varphi k_1}{f k_0}\right)^2 = \chi^2$$

so ist

(6) $$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0 (1 - \psi^2)}$$

(6a) $$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0 \chi^2}$$

Für $\alpha_0 = 90^0$ wird

(6b) $$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0$$

und für $\alpha_0 = 0^0$ geht Gleichung (6) über in

(6c) $$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \psi^2 = \frac{\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0$$

§ 3.

Die fünf platonischen Körper sind reguläre, konvexe Polyeder, deren sämtliche ebene Begrenzungsflächen kongruente, reguläre Polygone sind. Man nennt diese

*) s. L. Matthiessen, Schlömilch's Zeitschrift 1898/99.

Polygone Seitenflächen, die Grenzlinien der Seitenflächen Kanten, die Eckpunkte der letzteren Ecken. Die mögliche Anzahl regulärer konvexer Polyeder — kurzweg als Polyeder bezeichnet — ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Die Summe der Kantenwinkel jeder Ecke muss $< 360^0$ sein, jeder Polygonwinkel $< \frac{360^0}{3}$ d. h. $< 120^0$. Demnach kann ein Polyeder nur von gleichseitigen Dreiecken, Vierecken, Fünfecken und Sechsecken begrenzt sein. Ist die Summe der Kantenwinkel an jeder Ecke $= 360^0$, so sind die Begrenzungsflächen gleichseitige Dreiecke, Vierecke oder Sechsecke, und das Polyeder ist eine unendliche Kugel.

Da die Summe der Polygonwinkel an jeder Ecke $< 360^0$ ist, so giebt es drei mögliche, von gleichseitigen Dreiecken gebildete endliche Polyeder und eine Kugel

$3 \cdot 60^0 = 180^0$ . . . . Tetraeder
$4 \cdot 60^0 = 240^0$ . . . . Oktaeder
$5 \cdot 60^0 = 300^0$ . . . . Ikosaeder
$4 \cdot 90^0 = 3 \cdot 120^0 = 6 \cdot 60^0 = 360^0$ . . . . Kugel.

Von regulären Vierecken und Fünfecken mit ihren Polygonwinkeln 90^0 und 108^0 kann nur je ein endliches Polyeder begrenzt sein, denn

$4 \cdot 90^0 = 360^0$ (Kugel); $4 \cdot 108^0 > 360^0$;

demnach verbleibt:

$3 \cdot 90^0 = 270^0$ . . . . Hexaeder
$3 \cdot 108^0 = 324^0$ . . . . Dodekaeder.

Betrachtet man diese Fälle allgemeiner, so ist unter Annahme von e in einer Ecke zusammenstossenden regulären p-Ecken jeder Polygonwinkel gleich

$$\frac{(p-2)\,2\,R}{p}$$

und bei e solcher Winkel muss

$$\frac{e\,(p-2)\,2\,R}{p} < 4\,R.$$

Hieraus

$$e\,(p-2) < 2p$$

$$e < \frac{2p}{p-2} \quad \text{oder} \quad e < \frac{2}{1-\frac{2}{p}}$$

woraus ersichtlich ist, dass mit Wachsen von p, e kleiner wird.

Ist nun

$$p = 3, \text{ so } e < 6$$

es kann also p nur gleich 3, 4 und 5 sein.

$$p = 4, \text{ so } e < 4$$

d. h. e nur gleich 3

$$p = 5, \text{ so } e < 3\,\frac{1}{3}$$

d. h. e nur gleich 3

Betrachtet man die Kugel als Polyeder, so wird

$$\frac{e\,(p-2)\,2\,R}{p} = 4\,R$$

also

$$\frac{e\,(p-2)}{p} = 2$$

Es wird dann für

$$p = 3 \ldots\ldots e = 6$$
$$p = 4 \ldots\ldots e = 4$$
$$p = 6 \ldots\ldots e = 3$$

Den Grenzfall der Kugel ausgeschlossen, ergeben sich mithin fünf reguläre Polyeder.

Zwischen der Anzahl der Flächen (F), Kanten (K) und Ecken (E) der Polyeder besteht eine Abhängigkeit,

die der Euler'sche Satz in seiner ursprünglichen Form folgendermassen ausdrückt: die Summe der Anzahl der Seitenflächen und der Anzahl der Ecken ist um zwei grösser als die Anzahl der Kanten.

(7) $$F + E = 2 + K$$

Nach Prof. Matthiessen lassen sich die regulären Polyeder in einer schematischen Figur zusammenstellen, welche das Verhältnis E : K : F darstellt (Fig. 4) und zwar ist dasselbe für

das Tetraeder . . . . . 4 : 6 : 4
Hexaeder . . . . . 8 : 12 : 6
Oktaeder . . . . . 6 : 12 : 8
Dodekaeder . . . . 20 : 30 : 12
Ikosaeder . . . . . 12 : 30 : 20

Da nun für die Kugel unendlich viele Begrenzungsflächen anzunehmen sind, so ergiebt sich:

1) unter Annahme von gleichseitigen Dreiecken als begrenzende Flächen, da

$$K = \frac{3}{2}\infty \text{ und } E - K - F = \frac{1}{2}\infty,$$

für $$E : K : F = \infty : 3\infty : 2\infty = 1 : 3 : 2$$

2) unter Annahme von gleichseitigen Vierecken, da

$$K = \frac{4}{2}\infty \text{ und } E - K - F = \infty,$$

$$E : K : F = \infty : 2\infty : \infty = 1 : 2 : 1$$

3) unter Annahme von gleichseitigen Sechsecken, da

$$K = \frac{6}{2}\infty \text{ und } E = K - F = 2\infty$$

$$E : K : F = 2\infty : 3\infty : \infty = 2 : 3 : 1$$

Zur Bestimmung des Neigungswinkels i eines jeden Polyeders diene folgende Ableitung.

Jede Seite der regulären e-kantigen körperlichen Ecke (Fig. 5) sei gleich α und zwar $e \cdot \alpha < 360^0$. In dem gleichschenkligen Dreieck A B C ist

$$\sphericalangle B A C = \frac{360^0}{e}, \quad \sphericalangle A B C = \frac{i}{2}$$

und Seite $B C = \alpha$. Halbiert man den Winkel B A C, so ist in dem rechtwinklig sphärischen Dreieck B A C

$$\sphericalangle B A E = \frac{180^0}{e}, \quad \sphericalangle A B E = \frac{i}{2}, \quad B E = \frac{\alpha}{2}$$

Nach der Neper'schen Regel folgt:

$$\cos \frac{180^0}{e} = \sin \frac{i}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

mithin

$$\sin \frac{i}{2} = \frac{\cos \frac{180^0}{e}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \tag{8}$$

§ 4.

Es folgen hier noch die wichtigsten geometrischen Eigenschaften der fünf platonischen Körper; in den Gleichungen bedeutet:

a Kantenlänge

r_0 Radius der umschriebenen Kugel

r_f Radius der eingeschriebenen Kugel

r_k Radius der Kugel, welche alle Kanten berührt

i Flächenwinkel.

Das Tetraeder ist ein von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regulärer Körper mit vier Ecken und sechs Kanten, von denen immer drei in jeder Ecke zusammenstossen.

E 4 K – 6 F 4

(9) $r_0 = \frac{1}{4}\sqrt{6}\,a \quad r_f = \frac{1}{12}\sqrt{6}\,a \quad r_k = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,a$

aus (8) folgt

(10) $\cos i = \frac{1}{3} \quad i = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''$

Das Hexaeder ist ein von sechs kongruenten Quadraten begrenzter regulärer Körper mit acht Ecken und zwölf Kanten, von denen drei in jeder Ecke zusammenstossen.

E = 8 K = 12 F = 6

(11) $r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a \quad r_f = \frac{1}{2}a \quad r_k = \sqrt{\frac{1}{2}}a$

(12) $\cos i = 0 \quad i = 90^\circ$

Das Oktaeder ist ein von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regulärer Körper mit sechs Ecken und zwölf Kanten, von denen in jeder Ecke vier zusammenstossen.

E = 6 K = 12 F = 8

(13) $r_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}a \quad r_f = \sqrt{\frac{1}{6}}a \quad r_k = \frac{1}{2}a$

(14) $\cos i = -\frac{1}{3} \quad i = 109^\circ\ 28'\ 16{,}4''$

Das Dodekaeder ist ein von zwölf kongruenten regulären Fünfecken begrenzter regulärer Körper mit zwanzig Ecken und dreissig Kanten, von denen je drei in einer Ecke zusammenstossen.

E = 20 K = 30 F = 12

$r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,d$

oder da

$$d = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)a$$

$$r_0 = \frac{1}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}\;a \tag{15}$$

d bedeutet hierbei die Diagonale eines regulären Fünfeckes.

$$r_f = \frac{1}{4}\sqrt{10+\frac{22}{5}\sqrt{5}}\;a$$

$$r_k = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+3\right)a$$

$$\operatorname{tg} i = -2 \quad i = 116^\circ\ 33'\ 54{,}2'' \tag{16}$$

Das Ikosaeder ist ein von zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regulärer Körper mit zwölf Ecken und dreissig Kanten, von denen fünf in jeder Ecke zusammenstossen.

$$E = 12 \quad K = 30 \quad F = 20$$

$$r_0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\;a \tag{17}$$

$$r_f = \frac{1}{12}\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)a$$

$$r_k = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)a$$

$$\sin i = \frac{2}{3} \quad i = 138^\circ\ 11'\ 22{,}9'' \tag{18}$$

§ 5.

Als einen speciellen Fall der Abbildung nehmen wir an, dass die Verbindungslinie zweier Gegenecken oder diejenige der Mittelpunkte zweier Gegenkanten resp.

Gegenflächen durch den ersten Knotenpunkt K_α des dioptrischen Systems geht.

In den Figuren 6–13 sind die zugehörigen Bildzeichnungen fortgelassen, um den Objekten eine übersichtliche Grösse geben zu können; über Anordnung der Bilder s. § 11.

Das Bild des Tetraeders.

In Fig. 6 sei die Verbindungslinie K_α O die Knotenpunktsaxe, welche zwei Gegenecken des Tetraeders halbiere. Die Kanten $A_0 D_0$ und $B_0 C_0$ liegen beide senkrecht zur Knotenaxe, die Bildlinien dieser beiden Geraden werden daher denselben Wert $A_1 D_1 = B_1 C_1 = a_1$ haben, der sich aus (6 b) ergiebt;
nach (9) ist

$$a_0 = \frac{2}{3} \sqrt{6}\, r_0$$

mithin

$$a_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

Die Kanten $A_0 B_0$, $A_0 C_0$, $B_0 D_0$ und $C_0 D_0$ haben gleiche Neigungswinkel zur Knotenaxe und daher gleiche Bildwerte a_1'. Zur Bestimmung dieses Neigungswinkels lege man z. B. durch A_0 eine Parallele zum Knotenstrahl und betrachte das durch die gleichkantige körperliche Ecke $A_0 C_0 D_0 W_0$ gebildete rechtseitige sphärische Dreieck $C_0 D_0 W_0$; aus diesem ergiebt sich:

$$\cos \alpha = \cos \frac{i}{2} \cdot \sin 60^\circ$$

zufolge (10) ist

$$\cos i = \frac{1}{3}$$

also

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und demgemäss nach (6)

$$a_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 2 \sqrt{\frac{1}{3}} (1 + \psi^2)$$

Da die Radien r_0 sämtlich unter gleichem Winkel gegen $K\alpha$ geneigt sind, so erhält man mit Einführung des Wertes

$$\cos \frac{A_0 0 D_0}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

in Gleichung (6) für

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \frac{1}{3} \chi^2}$$

Um die Aufstellung der in den Figuren 7 und 8 gezeichneten Tetraeder $B_0 D_0 E_0 G_0$ zu verstehn, denke man sich dieselben so aus dem Hexaeder entstanden, dass man von letzterem vier Pyramiden abschneidet, deren Grundflächen je ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die Seiten des letzteren sind Diagonalen der Polygonflächen des Hexaeders. In Fig. 7 halbiert der Knotenstrahl zwei Gegenkanten des Hexaeders. Eine weitere Orientirung ist nicht nötig, da durch eine Drehung um $K\alpha$ die Abbildungswerte keine Veränderung erfahren. Zu $B_0 D_0$ gehört wie oben gezeigt

$$B_1 D_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

nach (6c) findet man für

$$E_1 G_1 = \frac{\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0 \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

und ferner für

$$E_1 B_1 = E_1 D_1 = G_1 B_1 = G_1 D_1 = a_1''$$

da $\sphericalangle B_0 E_0 G_0 = 60^0$

$$a_1'' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{2}{3}\left(3 - \dot{\varphi}^2\right)}$$

In Fig. 8 sei die Verbindungslinie der Mitten zweier Hexaedergegenflächen mit dem ersten Knotenstrahl identisch. In dem Tetraeder $B_0 D_0 E_0 G_0$ bilden die Kanten

$$B_0 D_0 = B_0 E_0 = G_0 D_0 = G_0 E_0 = a_0'''$$

mit der Knotenaxe einen Winkel von 45°; demnach findet man:

$$a_1''' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \, 2 \sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \dot{\varphi}^2\right)}$$

$$D_0 G_0 = B_0 G_0 = a_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

da $\alpha_0 = 90^0$

§ 6.

Das Bild des Hexaeders.

Bei der durch Fig. 7 gekennzeichneten Stellung resultiert für

$$A_1 E_1 = B_1 F_1 = C_1 G_1 = D_1 H_1 = a_1$$

$$a_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{4}{3}}$$

denn nach (11) ist

$$a_0 = r_0 \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Die anderen Hexaederkanten a_0' bilden sämtlich mit $K\alpha$ einen Winkel von 45°; folglich nimmt a_1' die Form an:

$$a_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{2}{3}\left(1 + \psi^2\right)}$$

Für die Radien OA_0, OE_0, OC_0, $OG_0 = r_0$ ist

$$\cos \alpha_0 \sqrt{\frac{2}{3}},$$

also nach (6 a)

$$r_1 \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \frac{2}{3}\chi^2}$$

Für OB_0, OD_0, OF_0, OH_0 folgt:

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0$$

Nach Fig. 8 ergiebt sich:

$$A_1E_1 = B_1F_1 = C_1G_1 = D_1H_1 = A_1D_1 - B_1C_1 = E_1H_1 =$$

$$= F_1G_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$A_1B_1 \quad C_1D_1 \cdot E_1F_1 \cdot H_1G_1 \quad \frac{\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0 \sqrt{\frac{4}{3}}$$

und für sämtliche Radien, da

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \frac{1}{3}\chi^2}$$

§ 7.

Das Bild des Oktaeders.

In Fig. 9 gehe die Verbindungslinie zweier Gegenecken in ihrer Verlängerung durch den ersten Knotenpunkt $K\alpha$. E_0B_0, B_0F_0, E_0D_0 und E_0F_0 sind senkrecht

zur Knotenaxe gelegen, also nehmen ihre Bildwerte zufolge (13)

$$a_0 \quad \sqrt{2}\, r_0$$

die Form

$$a_1 \quad \frac{k_1}{k_0}\, r_0 \sqrt{2}$$

an. Die übrigen Kanten des Objektes mit ihrem Neigungswinkel von 45° ergeben

$$a_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 + \psi^2}$$

Des weiteren geht hervor:

$$0\,A_1 = 0\,C_1 = \frac{\varphi\, k_1^2}{f\, k_0^2}\, r_0$$

$$0\,B_1 = 0\,D_1 = 0\,E_1 = 0\,F_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0$$

Stellt man das Oktaeder so auf, dass der Knotenstrahl Halbierungslinie zweier Gegenkanten wird (Fig. 10), so nimmt die allgemeine Gleichung folgende Formen an:

$$0\,A_1 = 0\,B_1 = 0\,C_1 = 0\,D_1 = r_1$$

Neigungswinkel gleich 45°, mithin nach (6ª)

$$r_1 \quad \frac{k_1}{k_0}\, r_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\chi^2}$$

$$0E_1 \quad 0F_1 \quad \frac{k_1}{k_0}\, r_0$$

$$A_1 B_1 = C_1 D_1 = \frac{k_1}{k_0}\, r_0 \sqrt{2}$$

$$B_1 C_1 \quad A_1 D_1 \quad \frac{\varphi\, k_1^2}{f\, k_0^2}\, r_0 \sqrt{2}$$

$$E_1 A_1 = E_1 B_1 = E_1 C_1 = E_1 D_1 = F_1 A_1 = F_1 B_1 = F_1 C_1 = F_1 D_1 = a_1$$

Neigungswinkel $E_0 B_0 C_0 = 60°$, demgemäss

$$a_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{2}\left(3 + \psi^2\right)}$$

§ 8.

Das Bild des Dodekaeders.

Das Dodekaeder in Fig. 11 ist derart orientiert, dass $K\alpha$ zwei Gegenkanten halbiert. Für die Kanten und Radien des Bildes gehen nachfolgende Relationen hervor. Aus (15) folgt für

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{5}\right)}\, r_0$$

demzufolge

$$A_1E_1 \quad M_1R_1 \quad J_1K_1 \quad T_1U_1 \quad \frac{k_1}{k_0}\, r_0 \sqrt{\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$C_1V_1 \quad G_1P_1 \quad \frac{\varphi\, k_1^2}{f\, k_0^2}\, r_0 \sqrt{\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

Setzt man die gleichwertigen Kanten
$A_1B_1 = A_1H_1 = E_1D_1 = E_1F_1 = M_1L_1 = M_1N_1 = R_1Q_1 = R_1S_1 = a_1$
so berechnet sich a_1 wie folgt:
durch die gleichkantige körperliche Ecke $A_0\, B_0\, E_0\, W_0$ entsteht das zu betrachtende rechtseitige sphärische Dreieck $B_0\, E_0\, W_0$; in demselben sind

$$E_0\, W_0 = 1\ R,\ \sphericalangle\ B_0\, E_0\, W_0 = \frac{i}{2}$$

und $B_0\, E_0$ y bekannt; $\sphericalangle$ y ist Winkel in einem regulären Fünfseit und da die Diagonale eines solchen

$$d \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) a$$

so ist

$$\cos y = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)$$

nach (16)

$$\cos \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$$

und es resultiert demnach für den gesuchten Neigungswinkel x

$$\cos x = \cos \frac{i}{2} \sin y$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}\left(10 - \sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{11 - 3\sqrt{5}}$$

es ist also

$$a_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{5}\right)} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 - \frac{1}{16}\left(11 - 3\sqrt{5}\right)}\left(1 - \varphi^2\right)$$

$$a_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \cdot \sqrt{2\varphi^2 + \frac{1}{6}\sqrt{5}\left(1 - \varphi^2\right)}$$

Weiter ist

$$T_1 D_1 = U_1 F_1 = U_1 Q_1 = T_1 S_1 = K_1 B_1 = K_1 L_1 = I_1 H_1 = I_1 M_1 = a_1'$$

Der zu $T_1 D_1$ gehörige Neigungswinkel x folgt aus dem rechtseitigen sphärischen Dreieck $U_1 D_1 W_1$; in demselben ist $U_1 W_1 = 1$ R, $\sphericalangle D_1 U_1 W_1 = 90^\circ - \frac{i}{2}$ $U_1 D_1 = y$ und zwar

$$\cos y = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{5}\right)$$

$$\sin y = \sqrt{\frac{1}{8}\left(10 - \sqrt{5}\right)}$$

$$\cos\frac{i}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$$

$$\cos x = \sin\frac{i}{2}\sin y$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$$

folglich

$$a_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{5}\right)}\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)\left(1 - \phi^2\right)}$$

Für

$$C_1 B_1 = C_1 D_1 = G_1 H_1 = G_1 F_1 = V_1 S_1 = V_1 L_1 = P_1 Q_1 = P_1 N_1 = a_1''$$

folgt, da der Neigungswinkel $V_0 C_0 B_0 = y$ und

$$\cos y = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{5}\right)$$

$$a_1'' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{6}\left(5 + 7\phi^2\right) - \sqrt{5}\left(1 + 3\phi^2\right)}$$

Die Radien des Bildes erhalten nach (6) folgende Werte:

$$O A_1 = O E_1 = O M_1 = O R_1 = r_1$$

$$\cos\frac{A_0 O E_0}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{5}\right)}$$

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \phi^2\right) - \frac{1}{6}\sqrt{5}\left(1 - \phi^2\right)}$$

$$OC_1 = OG_1 = OP_1 = OV_1 = r_1'$$

$$\cos\frac{G_0 OC_0}{2} = \sqrt{\frac{2}{9 + 3\sqrt{5}}}$$

$$r_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \frac{2}{9 + 3\sqrt{5}} \left(1 - \dot{\varphi}^2\right)}$$

$$OK_1 \quad OI_1 \quad OT_1 \quad OU_1 \quad \frac{k_1}{k_0} r_0$$

$$OB_1 = OH_1 = OD_1 = OF_1 = OL_1 = OM_1 = OQ_1 = OS_1 = r_1''$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 - 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}$$

$$r_1'' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \frac{1 - 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \left(1 - \dot{\varphi}^2\right)}$$

Weitere einfache Aufstellungen ergeben sich aus der Thatsache, dass man einem Dodekaeder ein Hexaeder einschreiben kann, dessen Ecken acht Dodekaederecken bilden; die Würfelkante ist Diagonale des Fünfeckes; jede der sechs Hexaederflächen schneidet vom Dodekaeder sechs dreiseitige Prismen ab.

§ 9.

Das Bild des Ikosaeders.

In Fig. 12 gehe die Verbindungslinie zweier Gegenecken des Objektes durch K_α. Nach (17) ist:

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{5} \left(5 - \sqrt{5}\right)} r_0$$

demzufolge berechnen sich folgende Bildwerte

$$A_1 C_1 = A_1 D_1 \ldots\ldots = M_1 H_1 = M_1 J_1 \ldots\ldots = a_1$$

$$\cos D_0 A_0 0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$$

$$a_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{2}{5} \left[2 + \left(3 - \sqrt{5}\right) \dot{\varphi}^2\right]}$$

$$B_1 C_1 \quad C_1 D_1 \quad H_1 I_1 = G_1 H_1 \ldots\ldots = a_1'$$

$$\cos x = 0$$

$$a_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{2}{5}\left(5 - \sqrt{5}\right)}$$

$$J_1 C_1 = J_1 D_1 = K_1 D_1 = K_1 E_1 \ldots\ldots = a_1''.$$

Der Kosinus des zugehörigen Neigungswinkels ergiebt sich aus der der Fig. 12 eingezeichneten Hülfsfigur.

$$A V = \sqrt{\frac{3}{4}}\, a$$

$$Z V = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{\frac{4}{5}}}\, a$$

$$\cos \delta = \sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{4}{5}}\right)}$$

$$\cos \beta = \cos [i - (90^\circ + \delta)] = \sin i \cos \delta - \sin \delta \cos i$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{4}{5}}\right)} - \sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$$

$$\cos x = \cos \beta \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

und durch Umrechnung

$$\cos x = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)} - 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)}$$

$$a_1'' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \frac{1}{3}\sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\left(9 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}\,\chi^2\right) - \frac{14}{5}\left(3 - \sqrt{5}\right)\chi^2}$$

$$OA_1 = OM_1 = \frac{\varphi}{f}\frac{k_1^2}{k_0^2} r_0$$

$$OD_1 = OC_1 \ldots\ldots OI_1 \quad O_1 K_1 \ldots\ldots \quad r_1$$

$$\cos D_0 O A_0 = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$r_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \frac{1}{5} \chi^2}$$

Bei der in Fig. 13 gedachten Stellung geht hervor für:

$$A_1 B_1 = D_1 E_1 = K_1 M_1 = H_1 G_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{2}{5}\left(5 - \sqrt{5}\right)}$$

$$C_1 J_1 = F_1 L_1 = \frac{\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0 \sqrt{\frac{2}{5}\left(5 - \sqrt{5}\right)}$$

$$A_1 D_1 = A_1 E_1 = K_1 D_1 = K_1 E_1 = B_1 H_1 = B_1 G_1 = M_1 H_1 = M_1 G_1 = a_1'$$

In dem rechtwinklig sphärischen Dreieck $A_0 E_0 W_0$ ist

$$\sin \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{1}{6}\left(3 - \sqrt{5}\right)}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{8}\left(3 - \sqrt{5}\right)}$$

also

$$a_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 + \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}\right) \dot{\varphi}^2}$$

$A_1 C_1 = A_1 F_1 = B_1 C_1 = B_1 F_1 = K_1 I_1 = K_1 L_1 = M_1 I_1 = M_1 L_1 = a_1''$; aus dem rechtwinklig sphärischen Dreieck $B_0 C_0 W_0$ erfolgt

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{8}\left(3 + \sqrt{5}\right)}$$

$$a_1'' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{2}\left(3 + \dot{\varphi}^2\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}\left(5 - \dot{\varphi}^2\right)}}$$

$D_1 C_1 = D_1 H_1 = E_1 F_1 = E_1 L_1 = H_1 C_1 = H_1 I_1 = G_1 F_1 = G_1 L_1 = a_1'''$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$a_1''' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)\left(3 + \dot{\varphi}^2\right)}$$

$$0D_1 = 0E_1 = 0H_1 = 0G_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0$$

$$0A_1 = 0B_1 = 0K_1 = 0M_1 = r_1$$

$$\cos \frac{A_0 0 B_0}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$$

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\chi^2}$$

$$0G_1 = 0D_1 = 0F_1 = 0L_1 = r_1'$$

$$\cos \frac{F_0 0 C_0}{2} = \sin \frac{A_0 0 B_0}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}}$$

$$r_1' = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\,\chi^2}$$

§ 10.

Bisher haben wir, um den Bildwerten eine einfache Form zu geben, die Objekte derart orientiert, dass ihr Mittelpunkt Nullpunkt eines dreiaxigen rechtwinkligen Koordinatensystems wird, dessen Abscisse der Knotenpunktsstrahl ist und dessen Ordinaten die Verbindungslinien zweier Gegenecken oder diejenigen der Mitten zweier Gegenflächen resp. Gegenkanten darstellen.

Wir wenden uns nun der Betrachtung des allgemeinen Falles zu, indem wir unter Beibehaltung des Ursprunges jenes Koordinatensystemes dem Objekt eine beliebig schiefe Lage geben. Da durch eine Drehung des Objektes um die Abcisse O K_α die gefundenen Bildwerte unverändert bleiben, so können wir das dem Objekt fest eingeschriebene rechtwinklige Koordinatensystem durch eine Drehung um die Y und Z Axe auf das ursprüngliche zurückzuführen.

Betrachten wir die durch Fig. 8 fixierte Lage eines Hexaeders. Durch Drehung desselben um die Z = Axe — es bewege sich $A_0 D_0$ nach der Y = Axe zu — bei einem Winkos ω wird:

für $A_0 D_0$, $B_0 C_0$, $F_0 G_0$, $E_0 H_0$ $\quad \alpha_0 = 90^0$
„ $A_0 B_0$, $D_0 C_0$, $H_0 G_0$, $E_0 F_0$ $\quad \alpha_0 \quad \omega$
„ $A_0 E_0$, $B_0 F_0$, $C_0 G_0$, $D_0 H$ $\quad \alpha_0 \quad 90^0 - \omega$

Bei einer weiteren Drehung um die Y = Axe mit einem Drehungswinkel μ — es bewege sich z. B. A_0 nach der Y Z = Ebene zu —, ergiebt sich:

für $A_0 D_0$ $\quad \alpha_0 = \mu$
„ $A_0 E_0$ $\quad \cos \alpha_0 = \cos \mu \cdot \sin \omega,$

denn in dem rechtwinklig sphärischen Dreieck E V W (Fig. 14) ist $V W = \mu$, $E V = 90^0 - \omega$, $\sphericalangle E V W = 90^0$, folglich

$$\cos \alpha_0 = \cos \mu \cdot \sin \omega$$

Ferner folgt durch entsprechende Ableitung

für $A_0 B_0$ $\quad \cos \alpha_0 = \cos \mu \cdot \cos \omega$

Zur Bestimmung der Neigungswinkel der Radien wählen wir den Radius $0D_0$ (s. Fig. 8). Ist in Fig. 15 M der Mittelpunkt der Hexaederfläche $D_0 C_0 G_0 H_0$

$$\sphericalangle X M X' \quad \omega$$

d. i. der einer Drehung um die Z = Axe entsprechende Winkel, so findet man:

$$x' = \rho \cos \varphi' \qquad y' = \rho \sin \varphi'$$

$$\varphi' \quad \omega + \varphi$$

$$x' = \rho \cos (\omega + \varphi) = \rho \cos \omega \cos \varphi - \rho \sin \omega \cos \varphi$$

$$y' = \rho \sin (\omega + \varphi) = \rho \sin \omega \cos \varphi + \rho \cos \omega \sin \varphi$$

nun ist aber

$$\rho \cos \varphi = x, \qquad \rho \sin \varphi = y$$

also

$$x' = \cos\ \omega\, x - \sin\ \omega\, y$$
$$y' = \sin\ \omega\, x - \cos\ \omega\, y$$

mithin

$$\cos\ \varphi' = \frac{x}{\rho}\ \cos\ \omega - \frac{y}{\rho}\ \sin\ \omega.$$

Mit Hülfe dieses Wertes resultiert nun aus dem rechtwinklig sphärischen Dreieck U Þ T der Fig. 16

$$\cos\ \alpha_0' = \cos\ \lambda.\ \cos\ \varphi.$$

Bei der Drehung um die Y = Axe ergebe sich durch Projektion des Punktes D_0 auf die X Z = Ebene die Fig 17. Wir finden durch einfache Ableitung, welche der bei Fig. 15 gegebene entspricht, für

$$x' = x''\ \cos\ \mu + z''\ \sin\ \mu.$$

Aus Fig. 18 geht hervor:

$$\cos\ \alpha_0'' = \cos\ \varphi'.\ \cos\ \varphi'''.$$

Nun ist nach Fig. 15

$$\cos\ \varphi' = \frac{x'}{\rho}$$

und nach Fig. 17

$$\cos\ \varphi''' = \frac{x'}{\rho'}$$

also

$$\cos\ \alpha_0''' = \frac{x'^2}{\rho.\rho'}$$

worin

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{y'^2 + (x''\ \cos\ \mu + z''\ \sin\ \mu)^2}$$

und

$$\rho \quad \sqrt{x''^2 + z''^2}$$

§ 11.

Die hier behandelten Objekte lassen sich einer Kugel einschreiben, deren Bild ein Ellipsoid ist. Denken wir uns

der Kugel und dem zugehörigen Ellipsoid je ein dreiaxiges rechtwinkliges Koordinatensystem eingeschrieben und betrachten wir Bild und Objekt in Richtung der Lichtstrahlen, so folgt — sobald Bild und Objekt zu beiden Seiten der Knotenebenen liegen —, dass beide Abcissen gleiche Axenrichtung haben, dass aber die beiden kleinen Axen des Ellipsoides gegen ihre entsprechenden Ordinaten der Kugel um 180 ° gedreht erscheinen. Hieraus leitet sich ohne weiteres die Orientierung sämmtlicher Bildpunkte ab.

Die dioptrische Abbildungsmethode ist demnach keiner anderen einzureihen. Denn einmal werden nur noch in der Plastik Körper räumlich abgebildet; aber z. B. die für die Reliefperspektive nötigen mathematischen Beziehungen zwischen Objekt und Bild sind den hier geltenden gänzlich verschieden. Zweitens kommen die bei der Perspektive angewandten Abbildungsverfahren — Parallelprojektion, schiefe Projektion etc. — in Fortfall, da diese das räumliche Objekt auf einer Fläche nachbilden.

Am Ende meiner Arbeit angekommen, ist es mir ein Bedürfnis, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. phil. et med. Ludwig Matthiessen, für Ueberlassung des Themas und freundliche Unterstützung bei Ausführung der Arbeit auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Rostock, im Juli 1898.

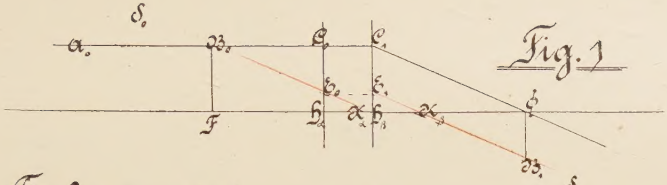

Fig. 1

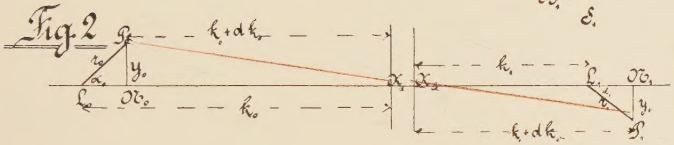

Fig. 2

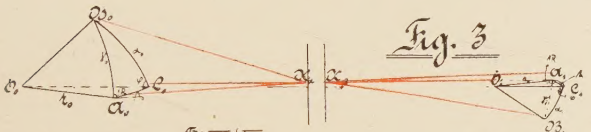

Fig. 3

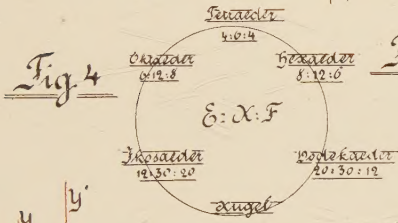

Fig. 4

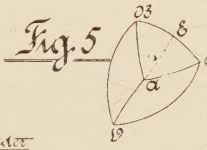

Fig. 5

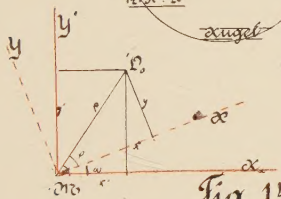

Fig. 14

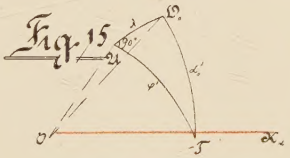

Fig. 15

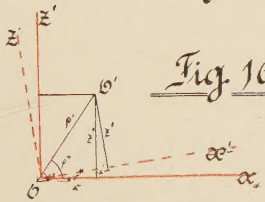

Fig. 16

Fig. 17

Fig. 6.

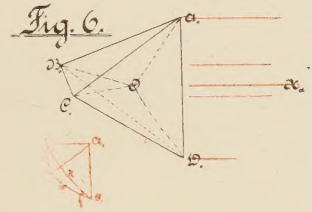

Fig. 7.

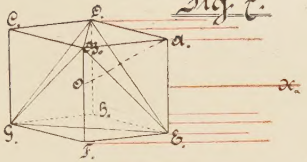

Fig. 8.

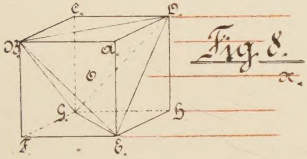

Fig. 9.

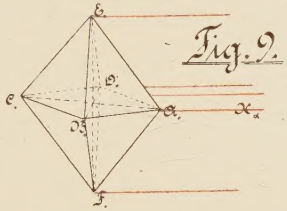

Fig. 10.

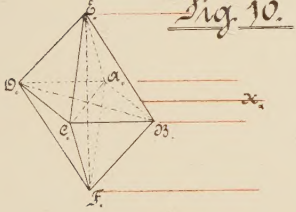

Fig. 11.

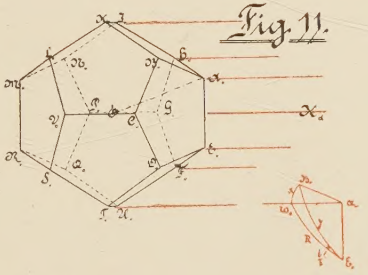

Fig. 12.

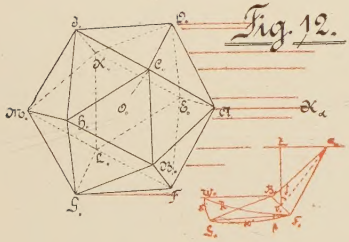
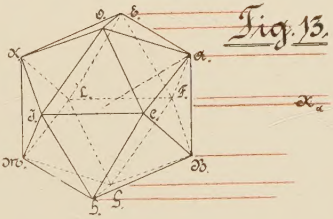
Fig. 13.